Fraktale

Def.:
Geometrische Objekte, welche einen hohen Grad an Selbstähnlichkeit aufweisen.

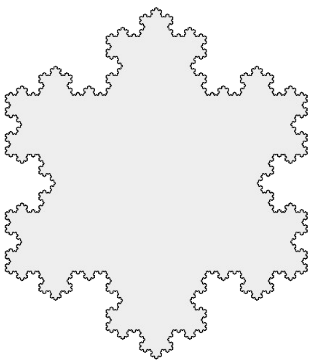
Eigenschaften:
- geometrische Objekte
- Entstehen durch Iteration
- hohe Selbstähnlichkeit
- gebrochene Dimension (Hausdorff Dim.)

L – System:
- Lindenmayer-System eignet sich gut, um einige Fraktale zu beschreiben.
- Def. Über Quadrupel folgender Form:
  G = (V, S, w, P),
  V = Variablen, **S** = Konstanten, (Bilden zusammen das Alphabet)
  w = Wort über dem Alphabet(Startwort), **P** = Ersetzungsregeln
- zusätzliche Informationen über Winkel u.a. meist mit angegeben.

Hausdorff – Dimension:
- Dimensionen beliebiger metrischer Objekte lassen sich damit berechnen
- positive, reelle Zahl
- vereinfachte Def.: **D = - lim[log(N) / log(R)]**
  N,R: N ist die Anzahl der Kreise mit Radius R, welche mind. Benötigt werden, um die Menge zu bedecken.

Ähnlichkeitsdimension:
- entspricht Hausdorff-Dim. bei selbstähnlichen Objekten
- Def.: **D = log(n) / log(m)**
  Objekt lässt sich durch **n** Kopien seiner selbst, welche zu ihm im Verhältnis **1/m** stehen, darstellen
- findet Anwendung bei vielen Fraktalen (Selbstähnlichkeit!)

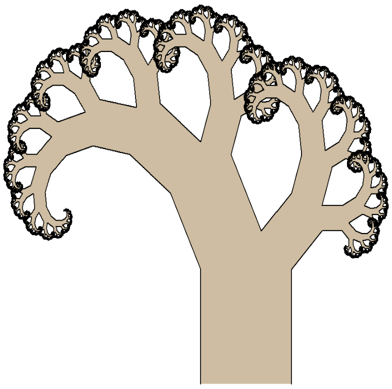
Beispiele für Fraktale:
- **Koch-Kurve/Koch-Snowflake:**



  - H-Dim: 1.2619
  - Bildungsgesetz: w = F--F--F
    P = F → F+F--F+F
    Winkel: 60°
  - Beispiel der Entwicklung eines L-Systems:
    w_0 = F--F--F
    w_1 = F+F--F+F--F+F--F+F--F+F--F+F
    w_2 = F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F--
    F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+
    F--F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F

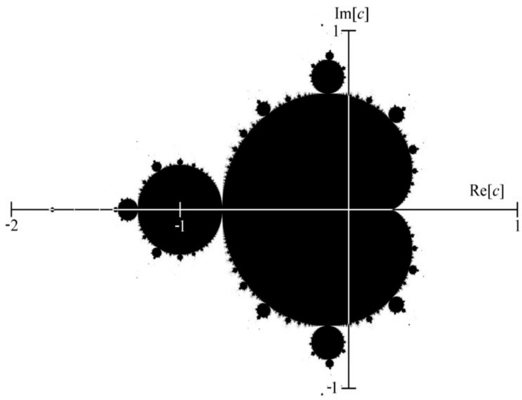
- Eigenschaften:
  - unendliche Kurve umschließt endliche Fläche, A = 5/8 A[init]

- **Pythagoras-Baum:**



  - H-Dim: 2
  - Bildungsgesetz:
    Startfigur: Rechteck
    1. erzeuge rechtwinkliges Dreieck auf einer Seite des Rechtecks, Hypotenuse = Rechtecksseite
    2. erzeuge auf Katheten des Dreiecks je ein Rechteck mit gleichen Seitenverhältnissen wie das Startrechteck.

- **Mandelbrot-Menge:**



  - H-Dim: 2
  - Bildungsgesetz:
    komplexe Zahlen,
    Folge **F: z[n+1] = z[n] + c**
    zur Mandelbrot-Menge gehören alle Zahlen c, für die F bei z0 = 0, nicht divergiert

- Eigenschaften:
  - selbstähnlich, viele Abbilder seiner selbst in der Menge, sog. Satelliten
  - zusammenhängende Fläche, A = ca. 1,50659177, begrenzender Rand unendlich

Vorkommen in der Natur:

- 3 bis 6 Strukturen von Selbstähnlichkeit
- keine strikte Selbstähnlichkeit, eher stochastische Selbstähnlichkeit
- **Beispiele:**
  - Pflanzen: Bäume, Blumenkohl, Farn
  - Tiere: Schneckenhäuser, Federn, Kapillarsystem
  - unbelebte Natur: Bergstrukturen, Wolken, Wirbelsturm, Feuer

Anwendung:

- Visualisierung von komplexen Objekten ist über fraktale geometrie resourcenschonend möglich
  - Beispiele: Berge, Feuer, Pflanzen, Wolken, …
  - eines der ersten mithilfe fraktaler Geometrie berechneten Bilder ist die einmal im Hintergrund zu sehende Galaxie in Star-Trek, Die Rache des Khan
- Medizin: Forschung an Ausnutzung fraktaler Strukturen im Körper zur besseren Tumorerkennung
- Technik: fraktale Antennen für breiten Frequenzbereich in zB. Handys, Verwendung in ComputerChips für bessere Performance
- u.a.