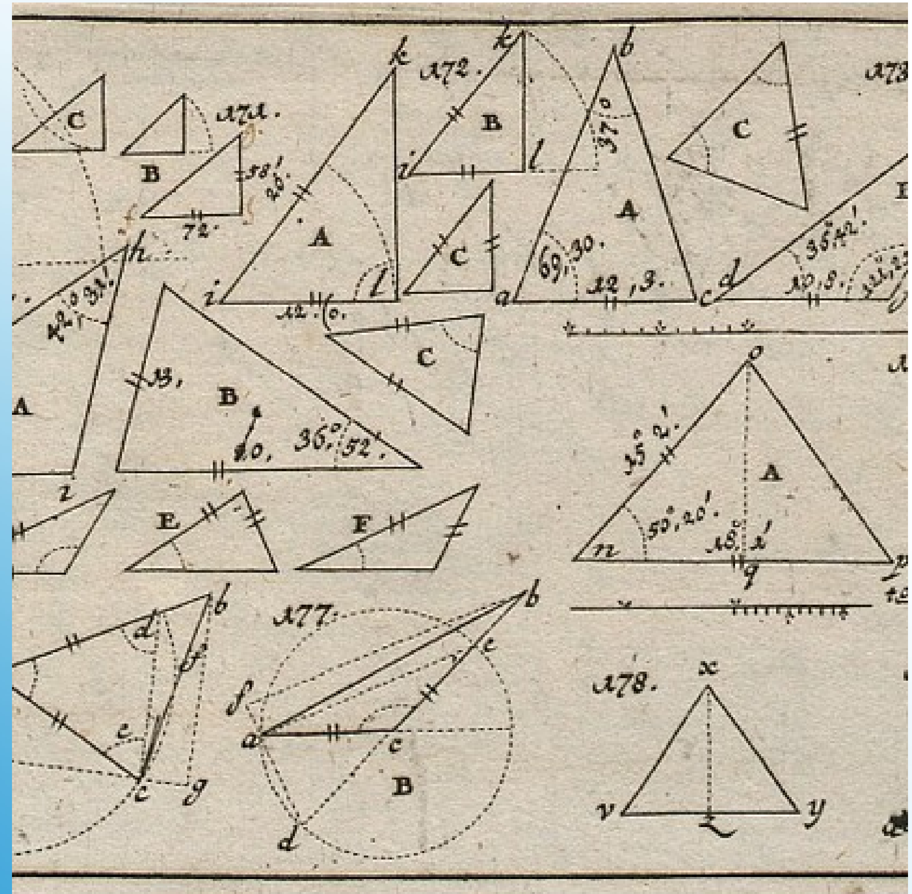
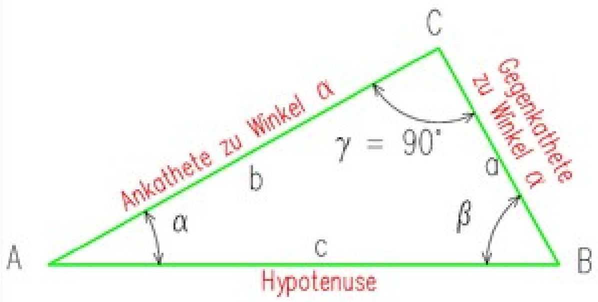
- Einleitung
- Im rechtwinkligen Dreieck
- Für beliebige Dreiecke
- Problem 11152: Colourful Flowers
- Problem 11326: Laser Pointer
- Problem 11170: Cos(NA)
- Problem 10297: Beawergnaw



Trigonometrie

- Aristarchos (ca. 250 v.Chr.) : Entfernungsverhältnisse Erde – Sonne – Mond (heliozentrisches Weltbild)
- Mittelalter: Entwicklung wegen neuer Anforderungen in Ballistik und Hochseeschifffahrt
- Euler: heutige Schreibweisen und Darstellung

Trigonometrie



$$\text{Sinus von } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

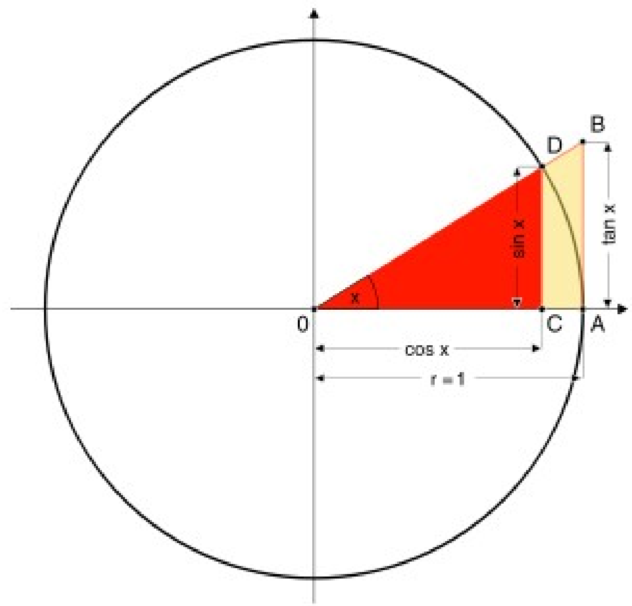
$$\text{Kosinus von } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens von } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kotangens von } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

$$\text{Sekans von } \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kosekans von } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}$$



Im rechtwinkligen Dreieck

Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinussatz

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

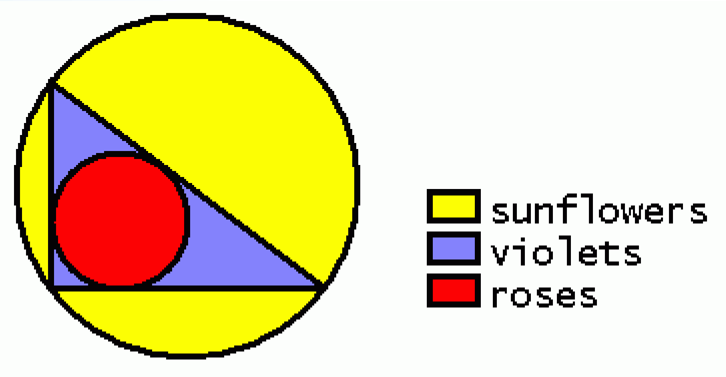
Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \ \cos\beta \mp \sin\alpha \ \sin\beta$$

Für beliebige Dreiecke

Input and Output

- Each line of input contains three integers a, b, c, the lengths of the three sides of the triangular region, with $0 < a \le b \le c \le 1000$.
- For each case, your program should output the areas of the regions with sunflowers, with violets and with roses respectively. Print your answers correct to 4 decimal places.



Colourful Flowers

Satz des Heron

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

zur Flächenberechnung des Dreiecks durch seine 3 Seiten

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

wobei s der halbe Umfang ist

```
int a,b,c;

double   s, outline,
         aTriangle, aIncircle,
         aOutercircle,
         rIncircle, rOutercircle;

         BufferedReader input = new ...

while (line!= null) {  ...

     a = Integer.parseInt(splitLine[0]);
     b = ...

     // outline is the sum of the 3 sites
     outline = a + b + c;

     // Heron's Formula for the area
        of the triangle
     s = outline / 2.0;
     ATriangle =

Math.sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c));
```

Colourful Flowers

Radius des Inkreises

Der Inkreisradius Dreicks mit der Fläche A und den Seiten a,b und c lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$r = \frac{2A}{a+b+c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Radius des Umkreises

Der Umkreisradius eines Dreiecks lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$R = \frac{abc}{4A}$$

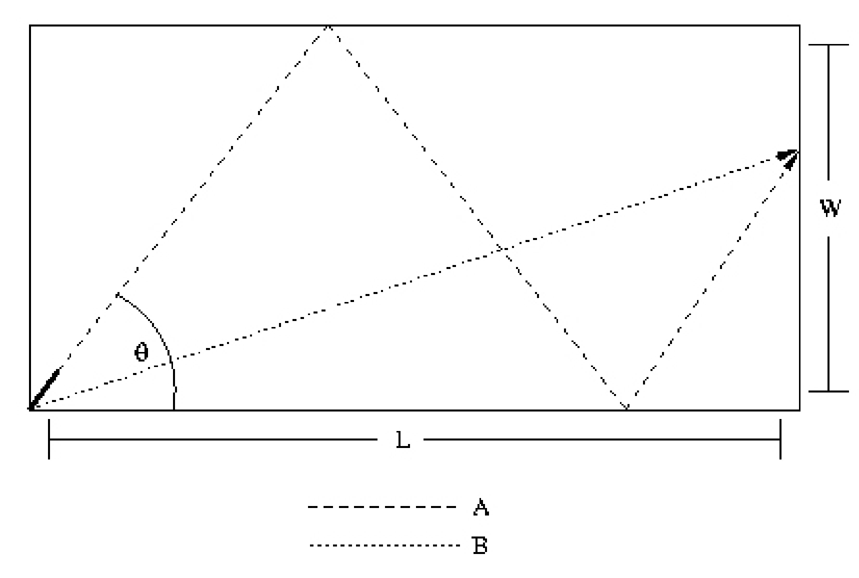
```
// radius and area of the inscribed circle (Pi * r²)

rIncircle = 2.0 * aTriangle / outline;

aIncircle = Math.PI * rIncircle *
        rIncircle;

// radius and area of the circumscribed circle

rOutercircle = (a * b * c) / (4.0 *
aTriangle);

aOutercircle = Math.PI * rOutercircle *
rOutercircle;

// substract overlaying areas from each other

aOutercircle -= aTriangle;

aTriangle -= aIncircle;
```

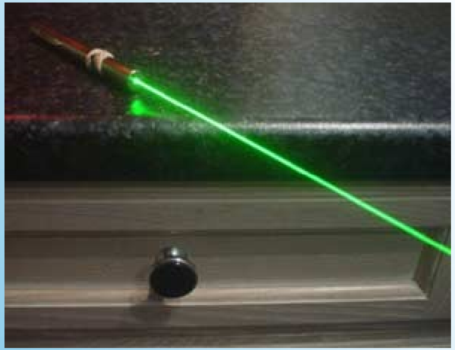
Colourful Flowers

Input and Output

- The first line of input indicates how many test cases follow. Each test case consists of three integers L, W, and θ on one line.

- The output for each test case is a single line containing the value A/B rounded to three decimal places.

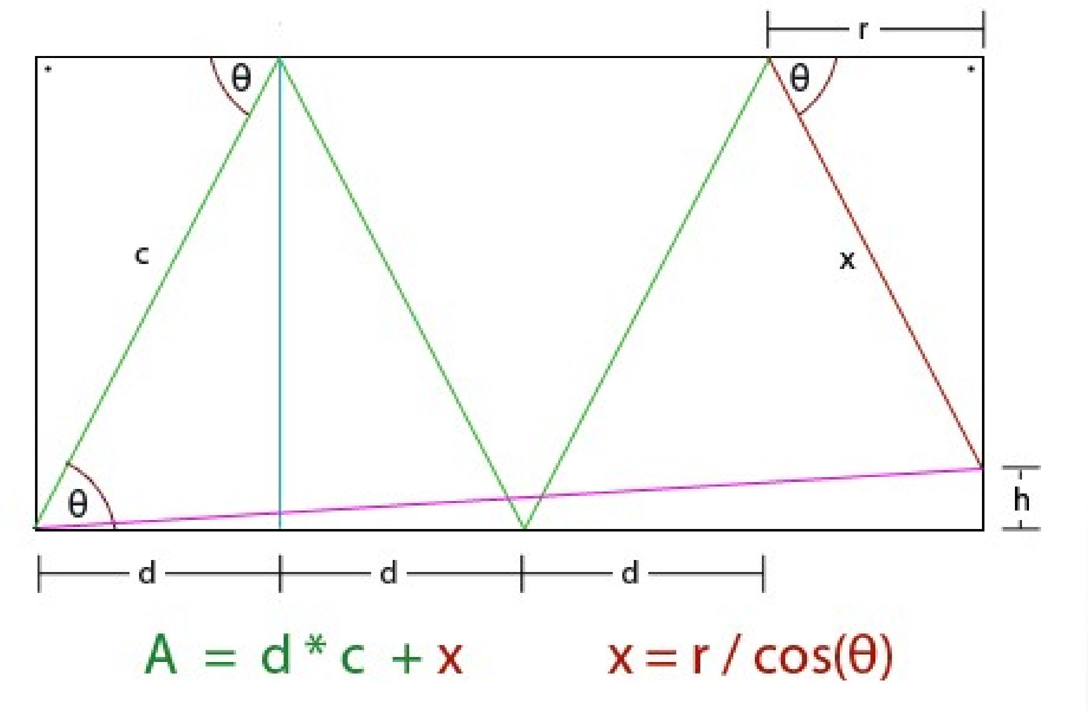




Laser Pointer

Idee

- Berechne, wie oft der Laser im Raum (ganz) gespiegelt wird (d), Rest x abhängig von r
- Seiten c,d und h über trigonometrische Funktionen berechnen (Z-Winkel)
- Fallunterscheidung: trifft der Laser von oben oder von unten auf die Ausgangswand
- Direkte Strecke über Pythagoras berechnen



Laser Pointer

Spezialfälle abfangen:

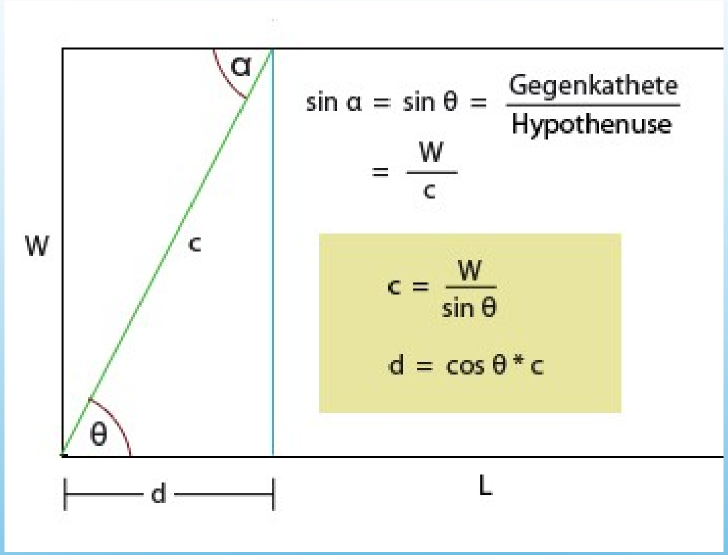
- Verhindert Division durch 0
- Ist schnell zu „berechnen“

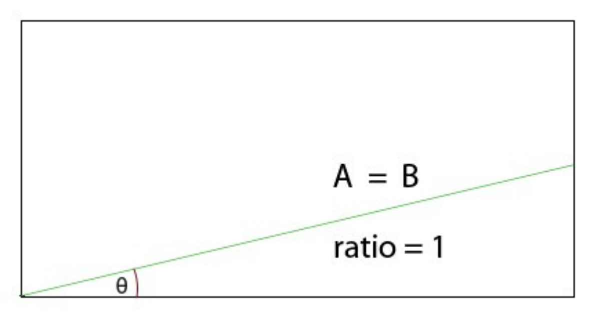
Math.sin(..), Math.cos(..), usw. erwarten den Winkel als Radiant

$$2\pi\,\mathrm{rad} = 360^\circ$$
$$1\,\mathrm{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}29577951^\circ$$

```
// special  cases: 0° and 90° ..
avoids division by 0, like in line 83:
 c = W / sin(0) and is also easy to
"calculate"

if (theta == 90)
    buffer.append(f.format(0.)+"\n");

else if (theta == 0)
    buffer.append(f.format(1.)+"\n");


else {

// convert to radians in order to be
able to calculate with Math.sin() /
Math.cos() / …

    thetaRad = Math.toRadians(theta);
```

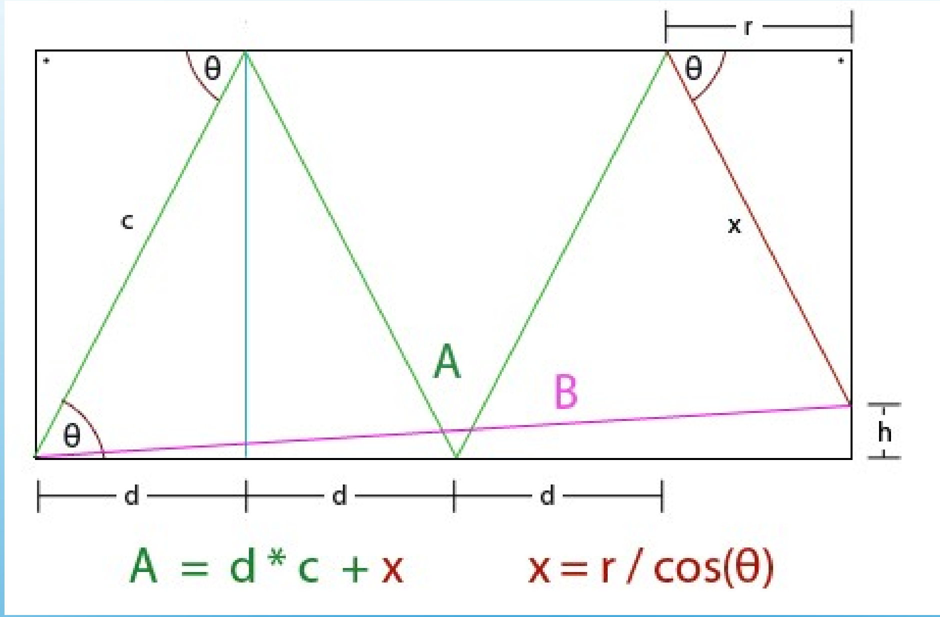
Laser Pointer






```
c = W / Math.sin(thetaRad);
d = c * Math.cos(thetaRad);


//  calculate, how often d fits into L
n = Math.floor(L/d);


//  if theta is sharp enough, the
laserpointer reaches the wall without
being mirrored,so A equals B (ratio 1)

if (n<1)

    buffer.append(f.format(1.)+"\n");
```

Laser Pointer




```
// rest distance on base line to wall
r = L - n*d;

// inderect distance
A = n*c + r / Math.cos(thetaRad);

// the value of h depends on the
number of times (even or odd) for the
laser to reflect before reaching the
exit
if(n%2 != 0)
    h = W - Math.tan(thetaRad) * r;

else
    h = Math.tan(thetaRad) * r;


// direct distance, Pythagoras
B = Math.sqrt(L*L + h*h);

// the result to output
ratio = A/B;
```

Laser Pointer

$$Cos(2A) = 2Cos^2(A) - 1$$

$$Cos(3A) = 4Cos^3(A) - 3Cos(A)$$

$$Cos(4A) = 8Cos^4(A) - 8Cos^2(A) + 1$$

Auffallend: Cos(NA) kann als Polynom N-ter Ordnung dargestellt werden

Cos(NA): Allgemeine Formel

$$cos(nx) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k (n-k-1)! 2^{n-2k-1} cos^{n-2k} x}{k!(n-2k!)}$$

$$= 2^{n-1} cos^n x + n \sum_{k=1}^{n/2} \frac{(-1)^k}{k} \binom{n-k-1}{k-1} 2^{n-2k-1} cos^{n-2k} x$$

$$= \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} sin^{2k} x cos^{n-2k} x$$

Einziges Problem: Kein reines Cos Polynom, da sin^2k enthalten ist

Herleitung: Formel von Moivre

Lösungformel für Cos(NA)

De Moivre Formel

$$\cos(nx)+i\sin(nx) = (\cos x+i\sin x)^n$$

Mit dem binomischen Lehrsatz kann der rechte Teil der Gleichung geöffnet werden.

Somit erhält man ein Polynom mit einem reelen und einem imaginären Teil.

Polynom + i(Polynom)

Der linke Teil stellt cos(nx) und der Inhalt der rechten Klammer ist sin(nx)

Herleitung mit der Moivre Formel

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad (1)$$

Wird verwendet, um einen Ausdruck der Form (x + y)^n als Polynom n-ten Grades Auszudrücken.

Berechnung des Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Binomischer Lehrsatz

Bsp.:

$$cos(2x) + isin(2x)$$

$$= (cosx + isinx)^2 \quad = \binom{2}{0} cos^2x + \binom{2}{1} cosx\ isinx - \binom{2}{2} (isinx)^2$$

$$= cos^2x + 2cosx\ isinx - sinx$$

$$= cos^2x - sin^2x + i(2cosx\ sinx)$$

cos (nx)

sin (nx)

Beispiel

$$sin^{2k}x = ?$$

$$sin^2 + cos^2 = 1$$ (Pythagoras im Einheitskreis)

$$sin^2 x = 1 - cos^2 x$$

$$sin^{2k}x = (1 - cos^2 x)^k$$

Letzteres lässt sich mit dem Binomischen Lehrsatz in eine Summe umwandeln

Herleitung

Binomischer Lehrsatz: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1)$

Damit lässt sich $(1 - cos^2 x)^k$ folgendermaßen ausdrücken:

$$(1 - cos^2 x)^k = \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} cos^{2(k-s)} x (-1)^s$$

Umformung mit dem binomischen Lehrsatz

Somit kann das Umgeformte sin^2k(x) in der Hauptformel eingesetzt werden und ergibt folgendes:

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} cos^{n-2k} x sin^{2k} x$$

$$= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k \binom{n}{2k} cos^{n-2k} \sum_{s=0}^{k} \binom{k}{s} cos^{2*(k-s)} x (-1)^s$$

Diese Formel wurde in Form von 2 for-Schleifen im Programm umgesetzt

Allgemeine Formel

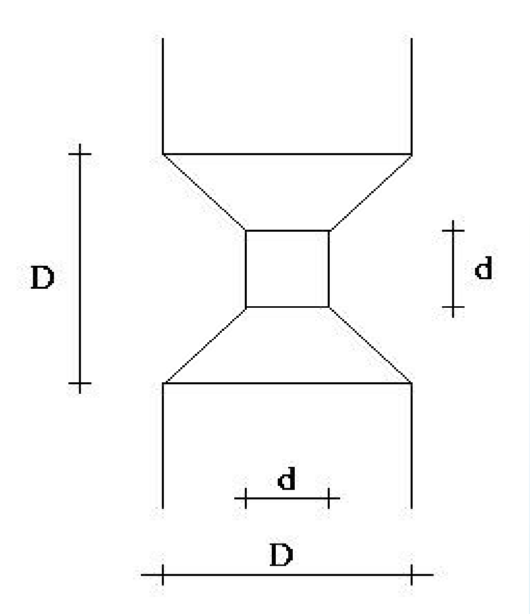
Sample Input	Sample Output
2	2Cos^2(A)-1
3	4Cos^3(A)-3Cos(A)
4	8Cos^4(A)-8Cos^2(A)+1
0	

Input / Output

- Biber nagt an einem zylindrischen Baumstamm mit dem Durchmesser und der Höhe D

- Gegeben ist D und das abgenagte Volumen des Holzes V

- Es soll der Duchrmesser / die Höhe des kleinen, übrig gebliebenen Zylinders d berechnet werden



Beavergnaw

- Volumen des intakten Holzstammes (Zylinder):

$$V_z = Pi(\frac{D}{2})^2 D$$

- Volumen des kleinen, übrig gebliebenen Zylinders:

$$V_s = Pi * (\frac{d}{2})^2 d$$

- Volumen eines der beiden Kegelstümpfe:

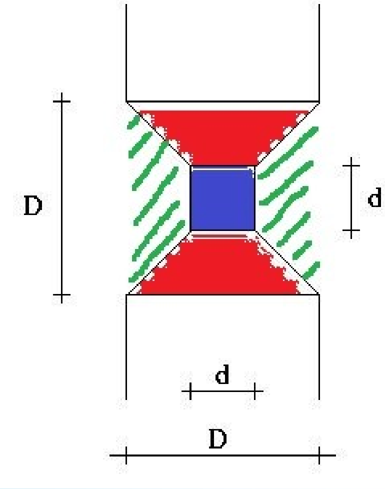
$$V_k = \frac{1}{3} Pi (\frac{D-d}{2})((\frac{D}{2})^2 + \frac{D}{2}\frac{d}{2} + (\frac{d}{2})^2)$$

- Höhe eines Kegelstumpfs:

$$h = \frac{D-d}{2}$$

- Volumen des Abgenagten Holzes:

$$V = V_z - V_s + 2V_k$$



Formeln

- Diese Formel ist das Volumen abhängig von d und D

- Da D und V gegeben sind, kann fuer alle Werte von D und V d berechnet werden

$$V = V_z - V_s + 2V_k =$$

$$= \quad Pi(\frac{D}{2})^2 D - Pi(\frac{d}{2})^2 d + 2(\frac{1}{3}Pi(\frac{D-d}{2})((\frac{D}{2})^2 + \frac{D}{2}\frac{d}{2} + (\frac{d}{2})^2))$$

- Durch Vereinfachen und Umformen dieser Formel kommt man auf folgenden Ausdruck:

$$d = \sqrt[3]{D^3 - \frac{6Vg}{\Pi}}$$

Lösungformel

Input: D, V

Output: d

Sample Input	Sample Output
10 250	8.054
20 2500	14.775
25 7000	13.115
50 50000	30.901
0 0	

Input / Output

Über Trigonometrie:

http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrie

http://de.wikipedia.org/wiki/Trigonometrische_Funktion

Multiple Angle Formula:

http://mathworld.wolfram.com/Multiple-AngleFormulas.html

Binomischer Lehrsatz, Volumenformeln:

Wikipedia

Multiple Angle Formula Herleitung:

http://www.trans4mind.com/personal_development/mathematics/trigonometry/deMoivre.htm

Quellen