1 Permutation ohne Wiederholung

Permutation von unterschiedlichen Elementen ohne Wiederholung, also eine bijektive Abbildung $A_n \to A_n$ einer n-elementigen Menge A_n auf sich selbst.

Definition 1.1 (Permutation ohne Wiederholung)
Für n Elemente gibt es $n!$ Möglichkeiten.

Beweis

$n = 1$: wahr, da ich ein Element nicht permutieren kann.
$n \to n+1$: kommt ein Element hinzu so kann man alle neuen Permutationen erreichen indem man das Element durch alle neuen $n+1$ Positionen aller vorherigen Permutationen wandern lässt. $\Rightarrow n! * (n+1) = (n+1)!$

2 Permutation mit Wiederholung

Gegeben sei eine Menge A_n und wir teilen deren Elemente in Gruppen ein. Gesucht ist nun die Anzahl der Anordnungen, für die nur diese Eigenschaft relevant sind. Die Elemente einer Gruppe sind austauschbar.

Definition 2.1 (Permutation mit Wiederholung)

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

n: Anzahl der Elemente
k: Anzahl der Gruppen
n_k: Anzahl der Elemente der Gruppe.

Beispiel

Nehmen wir an wir haben 8-Kugeln. 3 weiße, 4 schwarze und 1 blaue. So ist die Anzahl der Möglichkeiten an Anordnungen =

$$\frac{8!}{3!4!1!}$$

3 Begriffe

Definition 3.1 (Rang)
Wenn wir alle lexikographisch geordneten Permutationen von 0 bis $n-1$ durchnummerieren so ist diese Nummer der Rang der Permutation.

Definition 3.2 (Permutationselement)
π ist unsere Permutation und $\pi(x)$ ist das Element an der Stelle x in der Permutation.

4 Probleme

4.1 ID Codes (146)

Aufgabe

Wir bekommen als Eingabe eine Zeichenfolge s wobei $|s| \leq 10$ ist. Unsere Aufgabe ist es die Nachfolgepermutation zu finden.

Beispiel

Eingabe = abc $\Rightarrow$ Ausgabe = acb
Eingabe = accba $\Rightarrow$ Ausgabe = baacc

Lösung

1. Suche von rechts das erste Element p_k, das $p_k < p_{k+1}$ erfüllt
2. Such erneut von rechts das erste Element p_t, das $p_t > p_k$ erfüllt
3. Vertausche p_k und p_t
4. Kehre die Sequenz $p_{k+1}p_{k+2}...p_n$ um

4.2 Ranking

Aufgabe

Wir bekommen n Zahlen von 1 bis n (also eine Permutation) und müssen entscheiden welchen Rang diese Permutation hat.

Beispiel

Eingabe = 1 2 3 4 $\Rightarrow$ Ausgabe = 0
Eingabe = 4 3 2 1 $\Rightarrow$ Ausgabe = 4!-1

Lösungsidee

Rang				
0:	1	2	...	n
1:	1	2	...	
...:	1	...	...	
$(n-1)!-1$:	1	...	...	
$(n-1)!$:	**2**	...	...	
...:	2	...	...	
$2(n-1)!$:	**3**	...	...	

$$\Rightarrow (\pi(1)-1)(n-1)! \leq rank(\pi) \leq \pi(1)(n-1)! - 1$$

Beispiel

$n = 4$. Wir suchen den Rang der Permutation **1 3 4 2**. Durch die Abschätzung wissen wir schon wo der Rang in etwa liegen wird.

$$(1-1)(4-1)! \geq rank(\pi) \geq 1(4-1)! - 1$$

$$\Rightarrow 0 \geq rank(\pi) \geq 5$$

Rang				
0:	**1**	2	3	4
1:	1	2	4	3
2:	1	**3**	2	4
3:	1	3	**4**	**2**
4:	1	4	2	3
5:	1	4	3	2

Lösung

Daraus folgt dann die Formel:

$$rank(\pi, n) = (\pi(1) - 1)(n-1)! + rank(\pi', n-1)$$

Rang					
0:	1	2-1= 1	3-1= 2	4-1= 3	
1:	1	2-1= 1	4-1= 3	3-1= 2	
2:	1	3-1= 2	2-1= 1	4-1= 3	$\Rightarrow\pi'$
3:	1	3-1= 2	4-1= 3	2-1= 1	
4:	1	4-1= 3	2-1= 1	3-1= 2	
5:	1	4-1= 3	3-1= 2	2-1= 1	

$$\Rightarrow rank(\pi, n) = \sum_{i=1}^{n} n_i * (n-i)!$$

4.3 Unranking (941)

Aufgabe

Wir bekommen n und $rank$. n ist die Anzahl der Elemente und $rank$ ist der Rang. Wir sollen daraus die Permutation errechnen.

Beispiel

Eingabe = 4 1 $\Rightarrow$ Ausgabe = 1 2 4 3
Eingabe = 4 0 $\Rightarrow$ Ausgabe = 1 2 3 4

Lösungsidee

Wir wissen, dass die $\pi(1)$, $(n-1)!$-mal 1 ist bevor $\pi(1) = 2$ wird. Wir können also die erste Stelle berechnen und dann den Rang dementsprechend verringern und mit dem Rest weiter rechnen. Dies kann wieder rekursiv durchgeführt werden.

Beispiel

Angenommen $n = 4$ und Rang = 7.
$3! = \mathbf{6} < 7$
$\Rightarrow$ erste Zahl $= 1 + \frac{7}{6} = 2$, als Restrang bleibt $(7 \mod 6) = \mathbf{1}$

Rang						Restrang			
6:	2	1	3	4		0:	1	3	4
7:	2	1	4	3		**1**:	1	4	3
8:	2	3	1	4	$\Rightarrow$	2:	3	1	4
9:	2	3	4	1		3:	3	4	1
10:	2	4	1	3		4:	4	2	3
11:	2	4	3	1		5:	4	3	1

Lösung (grob)

1. i = 0 bis n
2. Ziffer = Rang / (n-i-1)! und den Rang = Rang mod (n-i-1)!
3. Überspringe alle schon gesetzten Ziffern
4. Merke dir die Ziffer als bereits gesetzt
5. Gehe zu 1.