Solving System of Linear Equations

- **Gruppe**
  - Christoph Waldleitner
  - Christian Weber
  - Marco Wolff
- **Online Judge**
  - Problem Nr. 10109
  - Lösung mit Gaußschen Eliminationsverfahren

Lineares Gleichungsystem

- **Allg. Form:**
  - Als eine lineares Gleichungssystem bezeichnet man ein System linearer Gleichung, die mehrere Variablen enthalten.

$$
\begin{matrix}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{matrix}
$$

  - Matrixform A = Koeffizientenmatrix. Alle Unbekannten zu einspaltigen Matrizen.

$$
A_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{0n} \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{1n} \\ \ldots \\ a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A\,x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} = b
$$

  - Erweiterte Koeffizientenmatrix.

$$
(A\,b) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{0n} & b_1 \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{1n} & b_2 \\ \ldots & \\ a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn} & b_m \end{pmatrix}
$$

Rang einer Matrix

- **Definition**
  - Der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

- **Beispiele**

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(A) = 3$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(B) = 2$$

Gaußsche Elimination

- **Erklärung**

  Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem Ax=b.

  Allgemein lässt sich der Algorithmus der Unbekannten (x) auf 2 Etappen aufteilen

  - 1. Vorwärtselimination

    Gleichungssystem wird auf Stufenform gebracht

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & =b_1 \\
 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & =b_2 \\
 & & a_{33}x_3 & =b_3
\end{array}
$$

  - 2. Rücksubstitution

    Von der letzten Zeile ausgehend werden die darüberliegenden Variablen auf 0 gesetzt

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 & & & =b_1 \\
 & a_{22}x_2 & & =b_2 \\
 & & a_{33}x_3 & =b_3
\end{array}
$$

Gaußsche Elimination am Bsp.

- **Gegeben**

$$\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 1 & =0 \\ 4 & 2 & 1 & =1 \\ 9 & 3 & 1 & =3 \end{array}$$

- **Schritt 1**

$$\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 1 & =0 \\ 0 & -2 & -3 & =1 \\ 0 & -6 & -8 & =3 \end{array}$$

- Zeile 2 = Zeile 2 -4 * Zeile 1
- Zeile 3 = Zeile 3 -9 * Zeile 1

- **Schritt 2**

$$\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 1 & =0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & =-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & =0 \end{array}$$

- Zeile 2 = Zeile 2 / -2
- Zeile 3 = Zeile 3 -3 * Zeile 2

- **Schritt 3**

$$\begin{array}{cccl} 1 & 1 & 0 & =0 \\ 0 & 1 & 0 & =-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & =0 \end{array}$$

- Zeile 1 = Zeile 1 -1 * Zeile 3
- Zeile 2 = Zeile 2 -3/2 * Zeile 3

- **Schritt 4**

$$\begin{array}{cccl} 1 & 0 & 0 & =\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & =-\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & =0 \end{array}$$

- Zeile 1 = Zeile 1 -1 * Zeile 2

$$\textit{Lösung}: \ a=\frac{1}{2}; \quad b=\frac{-1}{2}; \quad c=0$$

Lösbarkeit von mxn Matrizen

- **Ob eine Matrix eine Lösung hat, kann an ihrem Rang festgestellt werden.**

$$A_{mxn} \quad mit \quad rang(A)=r \quad (m \; Gleichungen \; mit \; n \; Unbekannten)$$

- **Ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix und gleich der Unbekannten ist die <u>Lösung eindeutig</u>.**

$$r = rang(A, b) = n$$

∞

- **Ist der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als die Anzahl der Unbekannten, dann können** $n-r$ **<u>Unbekannte frei gewählt</u> werden.**

- **Existiert in der Koeffizientenmatrix eine Nullzeile die ungleich 0 ergibt hat die Matrix <u>keine Lösung</u>.**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$