10309 – Turn The Lights Off

```
simple
#O########
OOO#######
#O########
####OO####
###O##O###
####OO####
##########
########O#
#######OOO
########O#
end
```

Gegebenheit des Problems

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Input

Es sind mehrere Fälle zu testen. Jeder Fall besteht aus einem Namen und 10 Zeilen. Jede Zeile beinhaltet einen 10 Zeichen langen String, der aus „#“ und „O“ besteht. Das Ende des Inputs wird mit einem „end“ signalisiert.

Output

Für jeden dieser Fälle wird eine Zeile mit dem jeweiligen Fallnamen ausgegeben, gefolgt von der minimalen Anzahl der Schalterbetätigungen, sodass alle Lichter („O“) ausgeschaltet sind („#“).

Gegebenheit des Problems

Schalterbetätigung funktioniert nicht einzeln sondern nach einem bestimmten Muster, dem sogenannten **Cross-Pattern**:

```
###      #O#
###  →   OOO
###      #O#

###      #O#
O#O  →   #O#
###      #O#
```

„Lights Out“ Ursprung

HOCHSCHULE
FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN · FH
MÜNCHEN

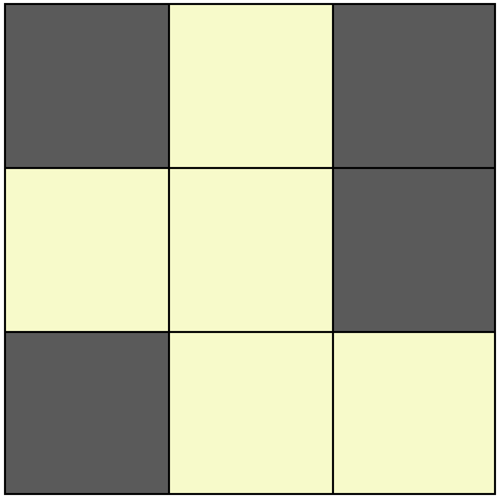
- Wurde von **László Mérő**, ein ungarischer Mathematiker und Psychologe, erfunden.
- **1983** stellte die Firma **Vulcan Electronics** ein erstes, darauf basierendes, elektronisches Spielzeug vor, genannt **XL-25**.

Mathematischer Hintergrund

Was hat dieses Spiel nun mit linearer Algebra zutun?

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Zuerst **betrachten** wir **das Spielfeld als** eine **Matrix(S)**, die die selben Dimensionen wie das Spielfeld besitzt. **Aktive Lichter** werden als „**1**“er betrachtet, **die anderen** als „**0**“er.



$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{S}$$

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Da es in unserem Spiel nur **zwei Zustände** gibt, „**an**“ und „**aus**“, legen wir fest, dass sich unsere mathematische Interpretation im $\mathbb{Z}_2$ (0 und 1) bewegt.

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Als nächstes betrachten wir die **Betätigung eines Schalters** auch **als** eine **Matrix(A(i,j))**. Die Betätigung des Schalters an der Position 1,1(linke obere Ecke) können wir wie folgt darstellen:

$$\mathbf{A(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Nun können wir die Betätigung eines Schalters als **Matrixaddition**(mod 2) darstellen, hier **S** + **A(1,1)**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Da die **Matrixaddition kommutativ** ist, ist die **Reihenfolge**, in der wir die **Schalter** betätigen, **unerheblich**.

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Nun können wir die Lösung des Problems wie folgt darstellen:
Um **vom** gegebenen **Anfangszustand(S) zum Endzustand(alle Lichter aus, Nullmatrix)** zu gelangen, müssen wir sämtliche **Schaltermatrizen(A(i,j)) jeweils** eine **bestimmte Anzahl(x(i,j)) oft** auf den **Anfangszustand addieren**.

→ **S + Summe(i,j)(x(i,j) * A(i,j)) = 0**

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Oder anders ausgedrückt:

→ **Summe(i,j)(x(i,j) * A(i,j)) = S**

Aber **wie oft** muss ein **Schalter** wirklich **betätigt** werden?

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

HOCHSCHULE
FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN · FH
MÜNCHEN

Hier kommen wir wieder auf unseren Zahlraum und unsere damit verbundene Modulo 2 Rechnung zurück:

→ Wenn man einen **Schalter gerade oft betätigt**, **hebt sich** sein **Effekt** wieder **auf**.
(z.B.: x(1,1) = 2 -> 2 % 2 = 0)

→ Wenn man einen **Schalter ungerade oft betätigt**, verhält er sich, als hätte man ihn **nur einmal betätigt.**
(z.B.: x(2,2) = 3 -> 3 % 2 = 1)

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Daraus folgern wir, dass unser **x(i,j) nur** die **zwei Werte „0“** und **„1“ annehmen kann**.

Durch diese Erkenntnisse sind wir nun in der Lage, ein **Gleichungssystem** aufzustellen, dass dem altbekannten Schema der linearen Algebra entspricht:

$$\mathbf{Ax = b}$$

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Nun ist unsere **Schaltermatrix(A)** eine Matrix der Dimension **9x9**. Sie **enthält sämtliche Schaltermatrizen(A(i,j))** in Form von **Spaltenvektoren**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

= A(1,1)

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Unsere **x(i,j)** ordnen wir **als Spaltenvektor** an:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x11 \\ x12 \\ x13 \\ x21 \\ x22 \\ x23 \\ x31 \\ x32 \\ x33 \end{bmatrix}$$

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

Auch **S** wird in einen **Spaltenvektor** umgewandelt:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mathematischer Hintergrund (Beispiel: 3x3 Spielfeld)

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Somit haben wir das Problem in die Form **Ax = S** gebracht, und brauchen nur noch das **Gleichungssystem auflösen**, um zu wissen **wie viele Schalter** wir **betätigen** müssen.

Mathematischer Hintergrund (allgemein)

Jetzt gibt es noch eine **Möglichkeit**, dass ganze zu **Vereinfachen**:

Wir untersuchen die **Matrix A** um herauszufinden, ob sie **Invertierbar**(= vollen Rang besitzt) **ist**. Dies bringt unsere Gleichung auf die Form:

x = S*Inverse(A)

Nun sparen wir uns das Lösen des Gleichungssystems und die **Lösung** ergibt sich durch **Ausrechnen**.

Mathematischer Hintergrund (allgemein)

HOCHSCHULE FÜR ANGEWANDTE WISSENSCHAFTEN · FH MÜNCHEN

Frage der Lösbarkeit:

Spielfelder, deren **Schaltermatrix(A) vollen Rang besitzt**, sind immer lösbar. Dies ergibt sich dadurch, dass ihre **Zeilen voneinander unabhängig** sind. Für unser Spiel bedeutet dass, das wir mit **bestimmten Schalterbetätigungen einzelne Lichter ansteuern** können.

Ist dies **nicht der Fall**, dann ist die **Spielsituation möglicherweise nicht lösbar**.

Auf Wiedersehen!

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Quellen

http://www.jaapsch.net/puzzles/lomath.htm

http://www.jaapsch.net/puzzles/cubic7.htm#p39

http://mathworld.wolfram.com/LightsOutPuzzle.html

Gruppe: Waldleitner Christoph, Weber Christian, Wolff Marco

SS11, Hochschule München