



TEILBARKEITSKRITERIEN

Angewandte Mathematik

- Daniel Brielbeck und Georg Weber -

INHALT

1. Motivation
2. Teilbarkeitskriterien mit Erklärungen und Beispielen
3. Beispiele aus dem Online Judge
4. Java Programm
5. Schluss

MOTIVATION

MOTIVATION

- Schnelle Prüfung auf Teilbarkeit
- Vielstellige Zahlen prüfbar machen
- Umsetzung in schnelleren Algorithmen
- Sparen von Rechenzeit und -leistung

TEILBARKEITSKRITERIEN

TEILBARKEITSKRITERIUM 2

- Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6 oder eine 8 ist

z.B. 23456, 12345, 55550, 02468

2345**6** → $(6 \% 2 = 0)$ → ✓

1234**5** → $(5 \% 2 = 1)$ → ⚡

5555**0** → $(0 \% 2 = 0)$ → ✓

0246**8** → $(8 \% 2 = 0)$ → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 4

- Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten beiden Stellen durch 4 teilbar sind

z.B. 23456, 12345, 55550, 02468

234**56** → $(56 \% 4 = 0)$ → ✓

123**45** → $(45 \% 4 = 1)$ → ⚡

555**50** → $(50 \% 4 = 2)$ → ⚡

024**68** → $(68 \% 4 = 0)$ → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 8

- Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten drei Stellen durch 8 teilbar sind

z.B. 1223000, 7912456, 8955728, 7802088

1223**000** → $(000 \% 8 = 0)$ → ✓

7912**461** → $(456 \% 8 = 5)$ → ⚡

8955**729** → $(729 \% 8 = 1)$ → ⚡

7802**088** → $(088 \% 8 = 0)$ → ✓

2ER POTENZEN

- Man kann jede 2er Potenz durch 2^n teilen, wenn die Zahl, die man aus ihren letzten n Ziffern bildet, durch 2^n teilbar ist.
- Wir können damit die Teilbarkeit durch alle 2er Potenzen prüfen: 2,4,8,16,32,64,128,256
- Um zum Beispiel zu testen, ob eine Zahl durch 32 teilbar ist, müssen wir nur ihre letzten 5 Stellen durch 32 teilen, egal wie lang sie ist

TEILBARKEITSKRITERIUM 5

- Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist (= durch 5 teilbar ist)

z.B. 47110, 23456, 12345, 55550

4711**0** → ✓

2345**6** → ⚡

1234**5** → ✓

5555**0** → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 25

- Eine Zahl ist durch 25 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern durch 25 teilbar sind

z.B. 471100, 234563, 123475, 555550

4711**00** → ✓

2345**63** → ⚡

1234**75** → ✓

5555**50** → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 125

- Eine Zahl ist durch 125 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern durch 125 teilbar sind

z.B. 4711000, 2345165, 1234250, 5555875

4711**000** → ✓

2345**165** → ⚡

1234**250** → ✓

5555**875** → ✓

5ER POTENZEN

- Man kann jede 5er Potenz durch 5^n teilen, wenn die Zahl, die man aus ihren letzten n Ziffern bildet, durch 5^n teilbar ist.
- Wir können damit die Teilbarkeit durch alle 5er Potenzen prüfen: 5, 25, 125, 625, 3125
- Um zum Beispiel zu testen, ob eine Zahl durch 3125 teilbar ist, müssen wir nur ihre letzten 5 Stellen durch 3125 teilen, egal wie lang sie ist

TEILBARKEITSKRITERIUM 10

- Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist

z.B. 47110, 12345, 55550

4711**0** → ✓

1234**5** → ⚡

5555**0** → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 100

- Eine Zahl ist durch 100 teilbar, wenn die letzten zwei Ziffern 00 sind

z.B. 4567800, 1234567, 5555500

45678**00** → ✓

12345**67** → ⚡

55555**00** → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 1000

- Eine Zahl ist durch 1000 teilbar, wenn die letzten drei Ziffern 000 sind

z.B. 4711000, 1234567, 5555000

4711**000** → ✓

1234**567** → ⚡

5555**000** → ✓

10ER POTENZEN

- Man kann eine Zahl durch 10^n teilen, wenn die letzten n Ziffern Nullen sind.
- Die Teilbarkeit durch Zehnerpotenzen kann man durch einfaches Hinschauen erkennen.

TEILBARKEITSKRITERIUM 20

- Eine Zahl ist genau dann durch 20 teilbar, wenn ihre vorletzte Ziffer gerade ist und ihre letzte Ziffer 0 ist.

z.B. 471120, 123456, 555580

4711**20** → $(2 \% 2 = 0$ und letzte Ziffer = 0) → ✓

1234**66** → $(6 \% 2 = 0$ und letzte Ziffer = 6) → ⚡

5555**80** → $(8 \% 2 = 0$ und letzte Ziffer = 0) → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 40

- Eine Zahl ist genau dann durch 40 teilbar, wenn die Zahl aus der drittletzten und der vorletzten Ziffer durch 4 teilbar ist und die letzte Ziffer eine 0 ist.

z.B. 471120, 123456, 555580

471**160** → (16 % 4 = 0 und letzte Ziffer = 0) → 

123**856** → (85 % 4 = 1 und letzte Ziffer = 6) → 

555**922** → (92 % 4 = 0 und letzte Ziffer = 0) → 

TEILBARKEITSKRITERIUM 50

- Eine Zahl ist genau dann durch 50 teilbar, wenn die Zahl auf 00 oder 50 endet

z.B. 471150, 123456, 555580

4711**50** → ✓

1234**56** → ⚡

5555**80** → ⚡

2ER UND 5ER POTENZEN

- Allgemein ist eine Zahl genau dann durch $2^m 5^n$ teilbar, wenn die Zahl aus ihren letzten $\max(m, n)$ Ziffern durch $2^m 5^n$ teilbar ist.
- Damit können wir die Teilbarkeit durch die Zahlen 10, 20, 50, 100, 200, 500 usw. ermitteln

NICHTALTERNIERENDE & ALTERNIERENDE QUERSUMMEN

- (Nichtalternierende) Quersummen:

Die Summe der Ziffernwerte einer natürlichen Zahl.

Beispiel: $123456 \rightarrow (1+2+3+4+5+6) \rightarrow$ Quersumme: 21

- Alternierende Quersumme:

Einer Zahl, rechts beginnend die Ziffernwerte abwechselnd subtrahiert und addiert.

Beispiel: $36036 \rightarrow 3-6+0-3+6 \rightarrow$ altern. Quersumme: 0

$36036 \rightarrow (3+0+6) - (6+3) \rightarrow$ altern. Quersumme: 0

TEILBARKEITSKRITERIUM 11

- Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre nichtalternierende 2er-Quersumme durch 11 teilbar ist.

z.B. 1234321, 1234567, 9392919

$$1234321 \rightarrow ((1+23+43+21) \% 11 = 0) \rightarrow$$



$$1234567 \rightarrow ((1+23+45+67) \% 11 = 4) \rightarrow$$



$$9392919 \rightarrow ((9+39+29+19) \% 11 = 8) \rightarrow$$



TEILBARKEITSKRITERIUM 111

- Eine Zahl ist genau dann durch 111 teilbar, wenn ihre nichtalternierende 3er-Quersumme durch 111 teilbar ist.

z.B. 123432, 123456, 939291

$$123432 \rightarrow ((123+432) \% 111 = 0) \rightarrow \checkmark$$
$$123456 \rightarrow ((123+456) \% 111 = 24) \rightarrow \text{⚡}$$
$$939291 \rightarrow ((939+291) \% 111 = 9) \rightarrow \text{⚡}$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 1111

- Eine Zahl ist genau dann durch 1111 teilbar, wenn ihre nichtalternierende 4er-Quersumme durch 111 teilbar ist.

z.B. 12344321, 12345678, 9392919

12344321 → $((1234+4321) \% 1111 = 0)$ → ✓
12345678 → $((1234+5678) \% 1111 = 246)$ → ⚡
9392919 → $((939+2919) \% 1111 = 525)$ → ⚡

ZAHLEN IN DER FORM 1...1

- Allgemein ist eine Zahl genau dann durch

$$1\dots 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

teilbar, wenn ihre nichtalternierende n -Quersumme durch teilbar ist.

TEILBARKEITSKRITERIUM 9

- Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre nichtalternierende Quersumme durch 9 teilbar ist.

z.B. 20466, 02468, 55551, 15885

$$20466 \rightarrow (2 + 0 + 4 + 6 + 6 \% 9 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

$$02468 \rightarrow (0 + 2 + 4 + 6 + 8 \% 9 = \mathbf{5}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$55551 \rightarrow (5 + 5 + 5 + 5 + 1 \% 9 = \mathbf{3}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$15885 \rightarrow (1 + 5 + 8 + 8 + 5 \% 9 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 99

- Eine Zahl ist genau dann durch 99 teilbar, wenn ihre nichtalternierende 2er-Quersumme durch 99 teilbar ist.

z.B. 223344, 102468, 655551, 715885

223344 → $(22 + 33 + 44 \% 99 = \mathbf{0})$ → ✓

102468 → $(10 + 24 + 68 \% 99 = \mathbf{3})$ → ⚡

655551 → $(65 + 55 + 51 \% 99 = \mathbf{72})$ → ⚡

715885 → $(71 + 58 + 85 \% 99 = \mathbf{16})$ → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 999

- Eine Zahl ist genau dann durch 999 teilbar, wenn ihre nichtalternierende 3er-Quersumme durch 999 teilbar ist.

z.B. 666333, 102468, 655551, 114885

$$666333 \rightarrow (666 + 333 \% 999 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

$$102468 \rightarrow (102 + 468 \% 999 = \mathbf{570}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$655551 \rightarrow (655 + 551 \% 999 = \mathbf{207}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$114885 \rightarrow (114 + 885 \% 999 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

ZAHLEN IN DER FORM 9...9

- Allgemein ist eine Zahl genau dann durch

$$9 \dots 9 = 10^n - 1$$

teilbar, wenn ihre nichtalternierende n -
Quersumme durch $10^n - 1$ teilbar ist.

TEILBARKEITSKRITERIUM 11

- Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

z.B. 1234321, 1234567, 9392919

$$1234321 \rightarrow ((1-2+3-4+3-2+1) \% 11 = 0) \rightarrow \checkmark$$

$$1234567 \rightarrow ((1-2+3-4+5-6+7) \% 11 = 4) \rightarrow \text{⚡}$$

$$9392919 \rightarrow ((9-3+9-2+9-1+9) \% 11 = 8) \rightarrow \text{⚡}$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 101

- Eine Zahl ist durch 101 teilbar, wenn die alternierende 2er-Quersumme durch 101 teilbar ist

z.B. 1234321, 1340167, 9392919

$$1234321 \rightarrow ((1+23-43+21) \% 101 = \mathbf{2}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$1340167 \rightarrow ((1+34-01+67) \% 101 = \mathbf{0}) \rightarrow \text{✓}$$

$$9392919 \rightarrow ((9+39-29+19) \% 101 = \mathbf{38}) \rightarrow \text{⚡}$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 1001

- Eine Zahl ist durch 1001 teilbar, wenn die alternierende 3er-Quersumme durch 1001 teilbar ist

z.B. 120123003, 123454321, 338256919

$$120123003 \rightarrow ((120 - 123 + 003) \% 1001 = 0) \rightarrow \checkmark$$

$$123454321 \rightarrow ((123 - 454 + 321) \% 1001 = -10) \rightarrow \text{⚡}$$

$$338256919 \rightarrow ((338 - 256 + 919) \% 1001 = 0) \rightarrow \checkmark$$

ZAHLEN IN DER FORM $10\dots 01$

- Allgemein ist eine Zahl genau dann durch

$$100\dots 001 = 10^n + 1$$

teilbar, wenn ihre alternierende n -Quersumme durch $10^n + 1$ teilbar ist.

TEILBARKEITSKRITERIUM 3

- Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist

z.B. 23466, 02468, 55551, 12345

23466 → $((2+3+4+6+6) \% 3 = 0)$ → ✓

02468 → $((0+2+4+6+8) \% 3 = 2)$ → ⚡

55551 → $((5+5+5+5+1) \% 3 = 0)$ → ✓

12345 → $((1+2+3+4+5) \% 3 = 0)$ → ✓

TEILBARKEITSKRITERIUM 7

- Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn die alternierende 3er-Quersumme durch 7 teilbar ist

z.B. 451127467, 317502468, 554563551

$$451127467 \rightarrow ((451-127+467) \% 7 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

$$317502468 \rightarrow ((317-502+468) \% 7 = \mathbf{3}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$554563551 \rightarrow ((554-563+553) \% 7 = \mathbf{5}) \rightarrow \text{⚡}$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 13

- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn die alternierende 3er-Quersumme durch 13 teilbar ist

z.B. 451127467, 317502468, 554563556

$$453127467 \rightarrow ((453-127+467) \% 13 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

$$317502468 \rightarrow ((317-502+468) \% 13 = \mathbf{10}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$554563556 \rightarrow ((556-563+553) \% 13 = \mathbf{0}) \rightarrow \checkmark$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 27

- Eine Zahl ist durch 27 teilbar, wenn die nicht-alternierende 3er-Quersumme durch 27 teilbar ist

z.B. 451127467, 319509468, 554563551

$$451127467 \rightarrow ((451+127+467) \% 27 = \mathbf{19}) \rightarrow \text{⚡}$$

$$319509468 \rightarrow ((319+509+468) \% 27 = \mathbf{0}) \rightarrow \text{✓}$$

$$554563551 \rightarrow ((554+563+553) \% 27 = \mathbf{23}) \rightarrow \text{⚡}$$

TEILBARKEITSKRITERIUM 37

- Eine Zahl ist durch 37 teilbar, wenn die nicht-alternierende 3er-Quersumme durch 37 teilbar ist

z.B. 451127467, 318509468, 554563551

$$451127467 \rightarrow ((451+127+467) \% 37 = 19) \rightarrow \text{⚡}$$

$$318509468 \rightarrow ((318+509+468) \% 37 = 0) \rightarrow \text{✓}$$

$$554563551 \rightarrow ((554+563+553) \% 37 = 5) \rightarrow \text{⚡}$$

WEITERE REGELN

Teilbarkeit	Quersumme	Alternierend / nichtalternierend	Kriterium
17	8er Quersumme	alternierend	teilbar durch 17
19	9er Quersumme	alternierend	teilbar durch 19
41	5er Quersumme	nichtalternierend	teilbar durch 41
73	4er Quersumme	alternierend	teilbar durch 73
77	3er Quersumme	alternierend	teilbar durch 77
91	3er Quersumme	alternierend	teilbar durch 91
137	4er Quersumme	alternierend	teilbar durch 137
143	3er Quersumme	alternierend	teilbar durch 143

BEISPIELE AUS JUDGE

PROBLEM 11879 - MULTIPLE OF 17

○ Problembeschreibung:

- Eingabe: Positive Zahl
- Ausgabe: Eingabezahl durch 17 teilbar (1) oder nicht (0)
- Problem: Eingabezahl kann bis zu 10000 Stellen haben
- Ende: Wenn Eingabezahl 0 ist

○ Problemlösungsansatz:

- Eingabezahl wird als String eingelesen und als Byte-Array verarbeitet
- Normale Rechenoperationen (* / + -) nicht möglich

PROBLEM 11879 - MULTIPLE OF 17

○ Teilbarkeitskriterium :

Eine Zahl ist durch 17 teilbar, wenn ihre alternierende 8-er Quersumme durch 17 teilbar ist.

Beispiel: 435345435 → 4-35345435 = -35345431

→ durch 17 Teilbar (-35345431 % 17 = 0)

○ Problemumsetzung:

```
public class Main {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        BufferedReader reader = new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
        String input = reader.readLine();
        char[] number = input.toCharArray();
        int l = number.length;
        while (!input.equals("0")) {
            int temp = quersumme(number, 8, true, 17);
            if (temp == 0)
                System.out.println("1");
            else
                System.out.println("0");
            input = reader.readLine();
            number = input.toCharArray();
            l = number.length;
        }
    }
}
```

17
1
55
0
435345435
1
34
1

PROBLEM 10929 - YOU CAN SAY 11

○ Problembeschreibung:

- Eingabe: Positive Zahl
- Ausgabe: Eingabezahl durch 11 teilbar oder nicht
- Problem: Eingabezahl kann bis zu 1000 Stellen haben
- Ende: Wenn Eingabezahl 0 ist

○ Problemlösungsansatz:

- Eingabezahl wird als String eingelesen und als Byte-Array verarbeitet
- Normale Rechenoperationen (* / + -) nicht möglich

PROBLEM 10929 - YOU CAN SAY 11

○ Teilbarkeitskriterium :

Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar oder 0 ist.

Beispiel: 51359 → 5 - 1 + 3 - 5 + 9 = 11 → durch 11 Teilbar (11 % 11 = 0)

○ Problemumsetzung:

```
char[] zahlen = input.trim().toCharArray();
if (zahlen.length > 0 && zahlen.length <= 1000) {
    int erg = Integer.parseInt(String.valueOf(zahlen[0]));
    boolean plus = false;
    for (int i = 1; i < zahlen.length; i++) {
        if (plus) {
            erg += Integer.parseInt(String.valueOf(zahlen[i]));
            plus = false;
        } else {
            erg -= Integer.parseInt(String.valueOf(zahlen[i]));
            plus = true;
        }
    }
    if (erg % 11 == 0 || erg == 0)
        System.out.println(input + " is a multiple of 11.");
    else
        System.out.println(input + " is not a multiple of 11.");
}
```

```
112233
30800
2937
323455693
5038297
112234
0
```

```
112233 is a multiple of 11.
30800 is a multiple of 11.
2937 is a multiple of 11.
323455693 is a multiple of 11.
5038297 is a multiple of 11.
112234 is not a multiple of 11.
```

JAVA BEISPIELPROGRAMM

UNSER JAVA- BEISPIELPROGRAMM

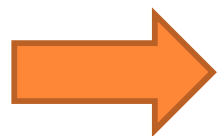
Hier Zahl eintippen und Enter drücken:

2er-Potenzen	5er Potenzen	10er Potenzen	5er und 2er	1...1	9...9	10...01	Quersumme	
<input checked="" type="checkbox"/> 2	<input checked="" type="checkbox"/> 5	<input checked="" type="checkbox"/> 10	<input checked="" type="checkbox"/> 20	<input type="checkbox"/> 11	<input checked="" type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 11	<input checked="" type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 17
<input checked="" type="checkbox"/> 4	<input checked="" type="checkbox"/> 25	<input checked="" type="checkbox"/> 100	<input checked="" type="checkbox"/> 40	<input type="checkbox"/> 111	<input type="checkbox"/> 99	<input type="checkbox"/> 101	<input checked="" type="checkbox"/> 7	<input checked="" type="checkbox"/> 27
<input checked="" type="checkbox"/> 8	<input checked="" type="checkbox"/> 125	<input checked="" type="checkbox"/> 1000	<input checked="" type="checkbox"/> 50	<input type="checkbox"/> 1111	<input type="checkbox"/> 999	<input type="checkbox"/> 1001	<input type="checkbox"/> 13	<input type="checkbox"/> 37

SCHLUSS

FAZIT

- Schnelle Prüfung auf Teilbarkeit ✓
- Vielstellige Zahlen prüfbar machen ✓
- Umsetzung in schnelleren Algorithmen ✓
- Sparen von Rechenzeit und –leistung ✓



Erst Denken dann Rechnen

QUELLEN

- Wikipedia:

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Quersumme>
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit>

- Sonstiges:

- <http://matheplanet.com/>
- <http://www.mathe.arbeiters.de/>

ENDE

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT.

FÜR FRAGEN STEHEN WIR GERNE ZUR VERFÜGUNG!