Diskrete Mathematik WS 09\10
Lösungsblatt 1

1

Definieren Sie die Begriffe:

(a) Menge, leere Menge, Gleichheit von Mengen

(b) Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und symmetrische Differenz zweier Mengen

(c) Potenzmenge

(d) Binäre Relation, Funktion, partielle Funktion

(e) injektive, surjektive, bijektive Funktion

Lösung:
Siehe Buch[2], Seiten 59-65.

2

Wann ist eine Relation über A ($\subset A \times A$):

(a) reflexiv

(b) irreflexiv

(c) symmetrisch

(d) antisymmetrisch

(e) transitiv

(f) total

(g) eine Äquivalenzrelation

?

Lösung:
Siehe Buch[2], Seite 64.

3

Zähle alle Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3, a\}$ auf.

Lösung:
Für ein Element aus der Menge gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Das Element ist in der Teilmenge nicht enthalten (0)

(b) Das Element ist in der Teilmenge enthalten (1)

Daraus ergibt sich: Jede Teilmenge kann als eine Binärdarstellung der Länge $|M|$ dargestellt werden.

$$\emptyset \iff 0000$$
$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{a\} \iff 1000, 0100, 0010, 0001$$
$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, a\}, \{2, 3\}, \{2, a\}, \{3, a\} \iff 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011$$
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, a\}, \{1, 3, a\}, \{2, 3, a\} \iff 1110, 1101, 1011, 0111$$
$$\{1, 2, 3, a\} \iff 1111$$

Insgesamt also: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} = 2^4 = 16$ Teilmengen

4

Bestimmen Sie die Mengen A und B, für die bekannt ist:

(a) $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$

(b) $A \cap B = \{c, 1\}$

(c) $A \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset$

(d) $\{a, b\} \cap B = \emptyset$

Lösung:

$$A = \{a, b, c, 1\}$$
$$B = \{c, 1, 2, 3, 4\}$$

5

Bestimmen Sie die Mengen A und B, für die bekannt ist:

(a) $A \cup B \cup C = \{x | x \in \mathbb{N} \land x < 10\}$

(b) $A \cap B = \emptyset$

(c) $C \subset B$

(d) $A \setminus C = \{1, 3, 7\}$

(e) $B \setminus C = \{5, 9\}$

Lösung:

$$A = \{1, 3, 7\}$$
$$B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$$
$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

6

Es seien folgende Mengen gegeben:

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}\} \text{ und } B = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\}$$

Bestimmen Sie die Mengen $A \cup B, A \cap B$ und $A \setminus B$.

Lösung:
A:

$$\frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z} \iff 3 + \frac{8}{x-2} \in \mathbb{Z} \iff x - 2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\} \iff$$
$$\iff A = \{-6, -4, -3, 0, 1, 3, 4, 6, 10\}$$

B:

$$\frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N} \iff 5 + \frac{12}{x-1} \in \mathbb{N} \iff x - 1 \in \{2, 3, 4, 5, 6, 12\} \iff$$
$$\iff B = \{2, 3, 4, 5, 7, 13\}$$
$$A \cup B = \{-6, -4, -3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13\}$$
$$A \cap B = \{3, 4, 6\}$$
$$A \setminus B = \{-6, -4, -3, -0, 1, 2, 5, 7, 10, 13\}$$

7

Es Sei A die Menge der Menschen in Deutschland. Wir definieren die Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ nach dem Gesetz: "$f(x) =$ die Größe der Person x in Zentimeter ". Ist f injektiv bzw. surjektiv ?

Lösung:
Nicht injektiv: es gibt zwei verschiedene Menschen M_1 und M_2 mit der selben Größe: $f(M_1) = f(M_2)$.
Nicht surjektiv: es gibt Werte $y \in \mathbb{R}$ (z.B. die negativen Zahlen), so dass es für sie kein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gibt.

8

Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist wie folgt defniert:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ n-1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Lösung:
Es seien $x_1, x_1 \in \mathbb{N}$, so dass $f(x_1) = f(x_2) = y$.
Wenn y gerade ist, folgt: $x_1 = x_2 = y + 1$.
Wenn y ungerade ist, folgt: $x_1 = x_2 = y - 1$.
Also ist f injektiv.
Es sei $y \in \mathbb{N}$.
Wenn y gerade ist, dann ist $f(y + 1) = y$.
Wenn y ungerade ist, dann ist $f(y - 1) = y$
Es folgt, dass es ein $x \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f(x) = y$. Also ist f surjektiv.
$\implies f$ ist bijektiv.

9

Gegeben sind die Mengen $A = \{\frac{100}{x} | \frac{11}{13} < \frac{100}{x} < \frac{17}{19}; x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ und B. Geben Sie die Elemente von A und B an, wenn für sie gilt:

(a) $A \not\subset B$

(b) $A \setminus B = \{\frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \frac{100}{114}\}$

(c) $B \cup \{\frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{119}\} = \{\frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{115}, \dots, \frac{100}{115}\}$

Lösung:

$$A = \{\frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \dots, \frac{100}{118}\}$$
$$B = \{\frac{100}{115}, \frac{100}{116}, \dots, \frac{100}{119}\}$$

10 Cantor-Diagonalisierung

Mit der Cantor-Diagonalisierung lässt sich zeigen, dass zwei Mengen dieselbe Mächtigkeit haben. Mit diesem Verfahren bewies Georg Cantor, dass die beiden unendlichen Mengen der natürlichen Zahlen und der positiven rationalen Zahlen die gleiche Kardinalität besitzen. Dieser Beweis zählt zu den bekanntesten der modernen Mathematik. Wenn eine Menge dieselbe Mächtigkeit aufweist wie die Menge der natürlichen Zahlen, sagt man, dass diese Menge abzählbar ist.

Lösung:
Siehe Buch[2], Seiten 67-72.

References

[1] Albrecht Beutelspacher, Marc-Alexander Zschiegner, Diskrete Mathematik für Einsteiger. Mit Anwendungen in Technik und Informatik, 3. Auflage, Vieweg Verlag, 2007.

[2] Doina Logofătu, Algorithmen und Problemlösungen mit C++, Vieweg+Tebuner Verlag, 2010.