Diskrete Mathematik WS 09\10
Lösungsblatt 1

1

Man zeige: unter $n+1$ Zahlen der Menge $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ gibt es stets zwei, von denen die eine die andere teilt.

Lösung:
Siehe Buch[1], Kapitel 1.6, Seiten 6-7.

2

Wieviele Personen braucht man, um behaupten zu können, dass q ($q \geq 2$) Personen am selben Tag Geburtstag haben ?

Lösung:
Nach dem Schubfachprinzip:

$$(q-1) * 365 + 1$$

3

Zu einer Veranstaltung werden n Teilnehmer erwartet. Man weiß, dass sich manche von ihnen schon kennen (wenn A die Person B kennt, dann kennt B auch A) und jeder kennt mindestens einer anderen. Zeigen Sie, dass es zwei Personen gibt, die gleich viele Teilnehmer kennen.

Lösung:
Siehe Buch[1], Kapitel 1.2, Seiten 2-3.

4

Zwei Spieler A und B machen auf einem karierten Blatt Papier folgendes Spiel: Spieler A macht ein $\times$ in ein Karo, Speiler B macht einen $\circ$ in ein Karo, Spieler A macht ein $\times$, B macht ein $\circ$, usw. Gewonnen hat, wer als erster ein Quadrat aus seinen Zeichen hat. Man zeige, dass B so spielen kann, dass A sicher nicht gewinnt.

Lösung:

Der zweite Spieler macht sein $\circ$ immer im gleichen Stein. Jedes Quadrat enthält einen ganzen Stein!

5

Die Punkte der Ebene seien mit den Farben Rot, Blau und Gelb gefärbt. Dann gibt es zwei Punkte gleicher Farbe mit dem Abstand 1.

Lösung:
Siehe Buch[1], Kapitel 2.6, Seite 23.

6

Eine natürliche Zahl n mit $1 \leq n < 10.000$ ist gegeben, und es ist bekannt, dass weder 2 noch 5 Teiler von n sind. Beweisen Sie mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass es Vielfache von n gibt, die nur aus der Ziffer 1 bestehen. Wie viele Ziffern hat die kleinste dieser Vielfachen? Eingabe: Die Eingabedatei zahl.in beinhaltet maximal 500 Eingabefälle, einen pro Zeile. Jeder Fall repräsentiert ein n. Ausgabe: Geben Sie in die Datei vielfache.out für jeden Eingabefall eine Zeile mit der Ziffernanzahl der kleinsten gesuchten Vielfachen aus, wie im Beispiel:
Lösung:
Siehe Buch[2], Kapitel 7.7, Seiten 184-185.

7

Auf einem Schachbrett steht ein Springer. Der Springer führt eine Anzahl von Sprüngen aus und ist beim n-ten Sprung wieder am Ausgangspunkt. Man zeige, dass n gerade ist.

Lösung:
Springer steht auf schwarz, er springt auf weiß.
Also Sprungfolge: $s, w, s, w, s, w, \ldots, w, s$
$\Longrightarrow$ Wenn Endpunkt auch schwarz sein soll, muss die Anzahl n gerade sein.

8

Definition durch Induktion (Rekursion).
Die Folge (a_n) wird definiert durch:

$$a_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{6 \cdot (1 + a_n)}{7 + a_n}$$

Angenommen die Folge konvergiert, was ist dann ihr Grenzwert?

Lösung:
Definiere Folge: $b_n = \frac{6\cdot(1+a_n)}{7+a_n} = a_{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{6\cdot(1+a)}{7+a}$$

Also: $a = \frac{6\cdot(1+a)}{7+a}$

$$\begin{aligned} a(7+a) &= 6(1+a) \\ 7a + a^2 &= 6a + 6 \\ a^2 + a &= 6 \\ a^2 + a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 6 + \frac{1}{4} \\ (a + \frac{1}{2})^2 &= \frac{25}{4} \\ a + \frac{1}{2} &= \pm\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$a_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} = 2, \quad a_2 = -\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2} = -3 \text{ (nicht möglich)}$$

Also Grenzwert 2.

9

Türme von Hanoi.
3 Stäbe, n gelochte Spielsteine bilden einen Turm (A). Man will den Turm (Stein für Stein) auf den Stab C umbauen und zwar so, dass nie ein größerer Stein auf einem kleineren liegt. Es darf nur eine Stein pro Zug von einem Stab auf einem anderen bewegt werden. Wie viele Züge benötigt man?

Lösung:
Anzahl der Züge: $2^n - 1$
Beweis mit Induktion:
$n = 1$, 1 Zug
$n = 2$, 3 Züge
Induktionsschluss: $n + 1$ Steine
Für $n + 1$ Steine muss man:

(a) erstmal n Steine von Stab A nach Stab B verschieben ($2^n - 1$ Züge)

(b) den größten von A nach C verschieben (1 Zug)

(c) anschließend den Turm von B nach C schieben ($2^n - 1$ Züge)

Also:

$$(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

$\square$

References

[1] Albrecht Beutelspacher, Marc-Alexander Zschiegner, Diskrete Mathematik für Einsteiger. Mit Anwendungen in Technik und Informatik, 3. Auflage, Vieweg Verlag, 2007.

[2] Doina Logofătu, Algorithmen und Problemlösungen mit C++, Vieweg+Tebuner Verlag, 2010.