Diskrete Mathematik WS 09\10
Lösungsblatt 3

1

Das Teilchen-Fächer-Modell
Wir haben n Fächer und k Teilchen. Wir wollen die Möglichkeiten zählen, die Teilchen auf die Fächern zu verteilen.

(a) Die Teilchen seien unterscheidbar (nummeriert von 1 bis k)

1. Mehrfachbelegung erlaubt
2. keine Mehrfachbelegung

(b) Die Teilchen seien nicht unterscheidbar (weiße Kugeln)

1. keine Mehrfachbelegung
2. Mehrfachbelegung erlaubt

Lösung:
(a)

1. $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

2. $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

(b)

1. Man wählt aus den n Fächer k Teilchen aus. Dann hat man $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

2. Entspricht einer Einfachbelegung mit $n+k-1$ Fächern (n Fächer und $k-1$ "zusätzliche" Fächer für k Teilchen.)
   Also $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

2

In einem Teig sind 10 Rosinen. Aus dem Teig werden 10 Semmeln gebacken und eine Semmel zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese genau 2 Rosinen enthält ?

Lösung:
Für die Modellierung der Wahrscheinlichkeiten nutzen wir die Formeln für unterscheidbare Teilchen, da die gleiche Konstellation aber mit unterschiedlichen

Teilchen verschiedene Situationen darstellt!
alle Fälle: $n^k = 10^{10}$
günstige Fälle: 2 Rosinen auswählen und die anderen 8 Rosinen auf 9 Fächer verteilen $\implies \binom{10}{2} \cdot 9^8$

$$P = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle Fälle}} = \frac{\binom{10}{2} \cdot 9^8}{10^{10}} = \binom{10}{2} \cdot \frac{9^8}{10^{10}} = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^8 \cdot \frac{1}{10^2} =$$

$$\frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0.43046721 \cdot \frac{1}{100} = \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot 0.0043046721 = 0.193710245$$

$$\approx 19\%$$

3

Auf 10 Fächer werden zufällig 4 Kugeln verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Fach gibt, in dem mehrere Kugeln liegen ?

Lösung:
Modell: $n = 10, k = 4$
alle Fälle: 10^4
günstige Fälle: alle Fälle - Fälle mit keiner Mehrfachbelegung $= n^k - \frac{n!}{(n-k)!}$
$= 10^4 - \frac{10!}{6!} = 10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 10^4 - 5040 = 10000 - 5040 = 4960$

$$P = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{alle Fälle}} = \frac{4960}{10000} = 0.496$$

$$\approx 50\%$$

4

Gegeben sind die Permutationen:

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \gamma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Man berechne:

$$\pi \circ \gamma, \gamma \circ \pi, \pi^{-1} \text{ und } \gamma^{-1}$$

Lösung:

$$\pi \circ \gamma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma \circ \pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{-1} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5

Es werden 10 Briefe und 10 Briefumschläge mit den Adressen geschrieben. Die Briefe werden zufällig in die Briefumschläge gesteckt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief beim richtigen Empfänger ankommt.

Lösung:
Permutationen von 1 bis 10: 10!
Anzahl der Permutationen ohne Fixpunkt (siehe [1] Kapitel 4.3.4):

$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right)\approx n!\cdot\frac{1}{e}$$

Hier $\approx \frac{10!}{e}$
Anzahl der Permutationen ohne Fixpunkt: $10!-\frac{10!}{e}$

$$P=\frac{10!-\frac{10!}{e}}{10!}=1-\frac{1}{e}\approx 0.63$$

$$\Longrightarrow\ 63\%$$

6

Permutationen in lexikographischer Reihenfolge
Generieren Sie für eine natürliche Zahl n alle Permutationen der Menge $\{1,2,...,n\}$ in lexikographischer Reihenfolge.
Eingabe: In der Datei genperm.in befindet sich eine natürliche Zahl $n(1\leq n\leq 10)$.
Ausgabe: Schreiben Sie in die Datei genperm.out alle Permutationen der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$ in lexikographischer Reihenfolge, und zwar eine Permutation pro Zeile.

Lösung:
Siehe Buch[2], Seiten 171-173.

7

Ranking einer Permutation in lexikographischer Reihenfolge
Wenn eine Ordnung über die Menge aller n-Permutationen (die Permutationen mit n Elementen) gegeben ist, dann ist der Rang einer Permutation gleichbedeutend mit deren Stelle in der geordneten Liste aller n-Permutationen. Wenn die Rangordnung mit 0 anfängt, dann können wir jeder Permutation einen Rang zwischen 0 und $n!-1$ zuweisen. Wir suchen den Rang einer gegebenen n-Permutation bzgl. der lexikographischen Ordnung und nehmen an, dass er in den Typ long passt.

Lösung:
Siehe Buch[2], Seiten 173-175.

8

Ranking einer Permutation in lexikographischer Reihenfolge
Das umgekehrte Problem. Wenn eine Ordnung über der Menge aller n-Permutationen gegeben ist, dann kennzeichnet die Stelle einer Permutation in der geordneten Liste aller n-Permutationen den Rang dieser Permutation. Wenn die Rangordnung mit 0 anfängt, können wir jeder Permutation einen Rang zwischen 0 und $n! - 1$ zuweisen. Wir wollen die n-Permutation bestimmen, für die n und ihr Rang gegeben sind. n und der Rang werden in Variablen des Typs long gespeichert.

Lösung:
Siehe Buch[2], Seiten 176-177.

References

[1] Albrecht Beutelspacher, Marc-Alexander Zschiegner, Diskrete Mathematik für Einsteiger. Mit Anwendungen in Technik und Informatik, 3. Auflage, Vieweg Verlag, 2007.

[2] Doina Logofătu, Algorithmen und Problemlösungen mit C++, Vieweg+Tebuner Verlag, 2010.