Diskrete Mathematik WS 09\10
Lösungsblatt 4

1

Definieren Sie die Begriffe:

(a) Teilbarkeit

(b) Primzahl

(c) Teilbarkeitsfunktion

(d) Größter gemeinsamer Teiler, kleinste gemeinsame Vielfache

Lösung:
Siehe Buch[1], Kapitel 5.
Siehe Buch[2], Kapitel 5, Seiten 79-82.

2

Schreiben Sie die Schritte des euklidischen Algorithmus für die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers von:

(a) 294 und 77

(b) 2521 und 338

Schreiben Sie die allgemeine Form des euklidischen Algorithmus.

Lösung:
a)

$$\begin{aligned} 294 &= 3 \cdot 77 + 63 \\ 77 &= 1 \cdot 63 + 14 \\ 63 &= 4 \cdot 14 + 7 \\ 14 &= 2 \cdot \mathbf{7} + \underline{0} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow ggT(294, 77) = 7$$

b)

$$\begin{aligned}
2521 &= 7 \cdot 338 + 155 \\
338 &= 2 \cdot 155 + 28 \\
155 &= 5 \cdot 28 + 15 \\
28 &= 1 \cdot 15 + 13 \\
15 &= 1 \cdot 13 + 2 \\
13 &= 6 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot \mathbf{1} + \underline{0}
\end{aligned}$$

$$\implies ggT(2521, 338) = 1$$

3

Man teile mit Rest:

(a) $28 \div 13$

(b) $(-28) \div 13$

Lösung:
a)

$$28 = 2 \cdot 13 + \underline{2}$$

b)

$$-28 = -3 \cdot 13 + \underline{11}$$

4

Gegeben sind beiden Zahlen a = 7623 und b = 25935

(a) Man berechne ggT(a,b)

(b) Man kombiniere 378 aus a und b !

Lösung:
a)

$$\begin{aligned}
25935 &= 3 \cdot 7623 + 3066 \\
7623 &= 2 \cdot 3066 + 1491 \\
3066 &= 2 \cdot 1491 + 84 \\
1491 &= 17 \cdot 84 + 63 \\
84 &= 1 \cdot 63 + 21 \\
63 &= 3 \cdot \mathbf{21} + \underline{0}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ ggT(25935, 7623) = 21$$

b) Erweiterter euklidischer Algorithmus:

$$ggT(a, b) = 21 = x \cdot a + y \cdot b$$

$$\begin{aligned} ggT(25935, 7623) = 21 &= 84 - 63 = 84 - (1491 - 17 \cdot 84) = \\ &= 18 \cdot 84 - 1491 = 18 \cdot (3066 - 2 \cdot 1491) - 1491 = \\ &= 18 \cdot 3066 - 37 \cdot 1491 = 18 \cdot 3066 - 37 \cdot (7623 - 2 \cdot 3066) = \\ &= 92 \cdot 3066 - 37 \cdot 7623 = 92 \cdot (25935 - 3 \cdot 7623) - 37 \cdot 7623 = \\ &= 92 \cdot 25935 - 313 \cdot 7623 = 21 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ 21 = 92 \cdot b - 313 \cdot a$$

$$ggT(a, b) = 92 \cdot b - 313 \cdot a$$

$$378 = 18 \cdot 21 = 18 \cdot (92 \cdot b - 313 \cdot a) = 1656 \cdot b - 5634 \cdot a$$

5

Die Alter eines Vaters, seines Sohnes und seines Enkels sind Primzahlen, und nach fünf Jahren werden es Quadratzahlen sein. Wie alt ist jeden von ihnen jetzt?

Lösung:
Durch Ausprobieren: 11,31,59 (in 5 Jahren 16, 36, 64)

6

(a) Man berechne mit dem Sieb des Eratosthenes alle Primzahlen 100.

(b) Man teste, ob 6319 eine Primzahl ist.

Lösung:
a) Primzahlen bis 100:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

b) $\sqrt{6319} = 79, 49\ldots$
$\Longrightarrow$ Man braucht nur Primzahlen ≤ 79 testen !

$$79 \not| \ 6319$$

$$73 \not| \ 6319$$

$$71 \mid 6319 \Longrightarrow 6319 = 71 \cdot 89$$

7

Man berechne für $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_7$ die + und * Verknüpfungstabellen.
Handelt es sich um "Körper" ?

Lösung:
$\mathbb{Z}_6$

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot$	(0)	1	2	3	4	5
(0	0	0	0	0	0	0)
1	(0)	1	2	3	4	5
2	(0)	2	4	0	2	4
3	(0)	3	0	3	0	3
4	(0)	4	2	0	4	2
5	(0)	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	0	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot$	(0)	1	2	3	4	5	6
(0	0	0	0	0	0	0	0)
1	(0)	1	2	3	4	5	6
2	(0)	2	4	6	1	3	5
3	(0)	3	6	2	5	1	4
4	(0)	4	1	5	2	6	3
5	(0)	5	3	1	6	4	2
6	(0)	6	5	4	3	2	1

Im Falle $\mathbb{Z}_7$ handelt es sich um einen Körper, da $(\mathbb{Z}_7, \cdot)$ eine Gruppe ist (jedes Element hat ein Inverses).

8

Beweisen Sie, dass es unedlich viele Primzahlen gibt.

Lösung:
Siehe Buch[1], Kapitel 5, Seite 79.

9

Finden Sie die letzte Ziffer der Zahlen: 2156^{43}, 425^{21}, 5234^{129} und $17^{80} + 12^{60}$

Lösung:
2156^{129}:
Letzte Ziffer ist 6 da, $6 \cdot 6 = 3\underline{6}$, also $2156^{43} = (2156 \cdot 2156)^{21} \cdot 2156 = (\ldots 6 \cdot \ldots 6)^{21} \cdot 2156 = \ldots 6$

425^{43}:
Letzte Ziffer ist 5 da, $5 \cdot 5 = 2\underline{5}$

5234^{129}:
Letzte Ziffer ist 4 da, $5234^{129} = (5234 \cdot 5234)^{64} \cdot 5234 = (\ldots 6)^{64} \cdot 5234 =$

$\ldots 6 \cdot 5234 = \ldots 4$

$17^{80} + 12^{60}$:
Letzte Ziffer ist 7 da:
$17^{80} = (17 \cdot 17)^{40} = (\ldots 9)^{40} = (\ldots 1)^{20} = \ldots 1$
und $12^{60} = (12 \cdot 12)^{30} = (\ldots 4)^{30} = (\ldots 4 \cdot \ldots 4)^{15} = (\ldots 6)^{15} = \ldots 6$
Also $\ldots 1 + \ldots 6 = \ldots 7$

10

Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $42 | n^7 - n$

(b) $37 | 1000^n - 1$

Lösung:
a)
$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$$42 | n^7 - n \implies n^7 - n \equiv 0 \mod 42$$
$$n^7 \equiv n \mod 42 \checkmark$$

Da die Ordnung von einem Element aus $\mathbb{Z}_{42}$ immer ≤ 7 ist.

$\square$

b)

$$37 | 1000^n - 1 \implies 1000^n - 1 \equiv 0 \mod 37$$
$$1000^n \equiv 1 \mod 37$$
$$1^n \equiv 1 \mod 37 \checkmark$$

$\square$

11

(a) Bestimmen Sie eine natürliche Zahl n mit den Bedingungen: $n - 2$ durch 6 teilbar und $n + 2$ durch 241 teilbar.

(b) Die Zahlen x, $x + 2$, $x + 6$, $x + 14$ und $x + 18$ sind alle prim. Bestimmen Sie x.

Lösung:
a)
$n - 2 = 6 \cdot p, n + 2 = 241 \cdot q$
kleinste q = 4 und k = 160 $\implies n = 962$

b)
x kann nicht 2 sein. Man zeigt weiter, dass x keine der Formen $5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ *oder* $5k+4$ haben kann. Es folgt, dass x die Form $5k$ hat. Die einzige Primzahl in dieser Form ist 5.

References

[1] Albrecht Beutelspacher, Marc-Alexander Zschiegner, Diskrete Mathematik für Einsteiger. Mit Anwendungen in Technik und Informatik, 3. Auflage, Vieweg Verlag, 2007.

[2] Doina Logofătu, Algorithmen und Problemlösungen mit C++, Vieweg+Tebuner Verlag, 2010.