1. Definieren Sie die Begriffe:
   - (a) Menge, leere Menge, Gleichheit von Mengen;
   - (b) Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und symmetrische Differenz zweier Mengen;
   - (c) Potenzmenge;
   - (d) Binäre Relation, Funktion, partielle Funktion;
   - (e) injektive, surjektive, bijektive Funktion.

2. Wann ist eine Relation über A ($\subseteq A \times A$):
   - (a) reflexiv
   - (b) irreflexiv
   - (c) symmetrisch
   - (d) antisymmetrisch
   - (e) transitiv
   - (f) total
   - (g) Äquivalenzrelation

   ?

3. Zählen Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, a\}$ auf.

4. Bestimmen Sie die Mengen A und B, für die bekannt ist:
   - (a) $A \cup B = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}$
   - (b) $A \cap B = \{c, 1\}$
   - (c) $A \cap \{2, 3, 4\} = \emptyset$
   - (d) $\{a, b\} \cap B = \emptyset$

5. Bestimmen Sie die Mengen A, B, und C, die alle diese Bedingungen erfüllen:
   - (a) $A \cup B \cup C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 10\}$
   - (b) $A \cap B = \emptyset$
   - (c) $C \subset B$
   - (d) $A \setminus C = \{1, 3, 7\}$

(e) $B \setminus C = \{5, 9\}$

6. Es seien die folgenden Mengen gegeben:

$$A=\{x \mid x\in\mathbb{N} \text{ und } \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbb{Z}\} \text{ und } B = \{x \mid x\in\mathbb{N} \text{ und } \frac{5x+7}{x-1} \in \mathbb{N}\}.$$

Bestimmen Sie die Mengen $A\cup B$, $A\cap B$ und $A\setminus B$.

7. Es sei A die Menge der Menschen in Deutschland. Wir definieren die Funktion f: $A \to \mathbb{R}$ nach dem Gesetz: „$f(x)$ = die Größe der Person x in Zentimeter“. Ist f injektiv? Oder surjektiv?

8. Die Funktion f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, \text{wenn } n \text{ gerade} \\ n-1, \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

9. Gegeben sind die Mengen $A = \left\{ \frac{100}{x} \,\middle|\, \frac{11}{13} < \frac{100}{x} < \frac{17}{19}; x \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \right\}$ und B. Geben Sie die Elemente von A und B an, wenn für A und B gilt:

(a) $B \subset A$ ist nicht wahr;

(b) $A \setminus B = \left\{ \frac{100}{112}, \frac{100}{113}, \frac{100}{114} \right\}$

(c) $B \cup \left\{ \frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{119} \right\} = \left\{ \frac{100}{113}, \frac{100}{114}, \frac{100}{115}, \ldots, \frac{100}{119} \right\}$

10.

Cantor-Diagonalisierung

Mit der Cantor-Diagonalisierung lässt sich zeigen, dass zwei Mengen dieselbe Mächtigkeit haben. Mit diesem Verfahren bewies Georg Cantor, dass die beiden unendlichen Mengen der natürlichen Zahlen und der positiven rationalen Zahlen die gleiche Kardinalität besitzen. Dieser Beweis zählt zu den bekanntesten der modernen Mathematik. Wenn eine Menge dieselbe Mächtigkeit aufweist wie die Menge der natürlichen Zahlen, sagt man, dass diese Menge abzählbar ist. Wir können die positiven rationalen Zahlen so darstellen:

1/1	1/2	1/3	1/4	...
2/1	2/2	2/3	2/4	...
3/1	3/2	3/3	3/4	...
4/1	4/2	4/3	4/4	...

....

Wenn man den Pfeilen folgt, ist der erste Term 1/1, der zweite 1/2, der dritte 2/1 usw. Es sei eine Zahl n gegeben ($1 \leq n \leq 444.444.444$), und der n-te Term dieser Anordnung ist gesucht. *Eingabe:* In der Datei *cantor.in* steht in jeder Zeile eine Zahl n. *Ausgabe:* Geben Sie die gesuchten Terme in die Datei *cantor.out* aus. Beispiel:

cantor.in	cantor.out
1	1. Term ist 1/1
3	3. Term ist 2/1
14	14. Term ist 2/4
7	7. Term ist 1/4
10	10. Term ist 4/1
789	789. Term ist 9/32
234561	234561. Term ist 395/291
3217	3217. Term ist 57/24
2000000	2000000. Term ist 1000/1001
3999999	3999999. Term ist 2621/208
200000000	200000000. Term ist 10000/10001
123456789	123456789. Term ist 253/15461
444444444	444444444. Term ist 22053/7762

(ACM, East-Central Regionals, 1993)

Literatur

1. Doina Logofătu, *Algorithmen und Problemlösungen mit C++*, Vieweg+Teubner Verlag, 2010.